Probabilité discrète

I. Définition d'une probabilité - Probabilité uniforme

1. Rappels

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc impossible à prévoir.
L'univers est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire. Ces résultats sont appelés des cas possibles.
Exemples

- Lancer d'une pièce de monnaie peut donner pile ou face, donc l'univers Ω = {P,F}.
- Lancer d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 jusqu'à 6, l'univers Ω ={1,2,3,4,5,6}.

Événement

Un événement A lié à une expérience aléatoire peut être réalisé ou ne pas être réalisé. Il est représenté par la partie de Ω formée par les cas possibles pour lesquels cet événement est réalisé (appelés cas favorables).

- $\varnothing$ est appelé événement impossible.
- Ω est appelé événement certain.
- Un événement réduit à un seul élément est appelé événement élémentaire.
- Si A et B sont deux événements , l'événement « A et B » représenté par $A\cap B$ est réalisé lorsque A et B sont réalisés en même temps. Si $A\cap B=\Omega$ on dit que A et B sont incompatibles.
- Si A et B sont deux événements , l'événement « A ou B » représenté par $A\cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
- On dit que des événements A1 , A2 , ... , An forment un système complet si :
  1. Les événements Ai sont deux à deux incompatibles.
  2. La réunion de tous les événements Ai est égale à l'univers Ω.
- Si A est un événement, $\overline{A}=\Omega\backslash A$ est appelé événement contraire de A

Formules de Morgan

Si A et B sont deux événements on a:

$\overline{\overline{A}}=A$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

2. Probabilité

Définition (Andrei Kolmogorov 1930)

Soit Ω un ensemble fini

On appelle probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω) toute application p : $\mathscr{P}(\Omega)\rightarrow[0,1]$ verifiant :

1) $p(\Omega=1$

2) Si A et B sont deux événements incompatibles alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Vocabulaire

Le triplet $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p)$ est appelé espace probabilisé fini

Activité

1) Soit A1 , A2 , ... , An des événements deux à deux incompatibles.
Montrer , à l'aide d'un raisonnement par récurrence , qu'on a :

$p(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$

2) En déduire que si A est un événement alors :

$p(A)=\sum_{\omega\in A}p(\{\omega\})$ en particulier $\sum_{\omega\in\Omega}p(\{\omega\})=1$

Exercice 1

On lance un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/8 et P(2)=P(6)=1/4.
Calculer P(5)

Propriétés

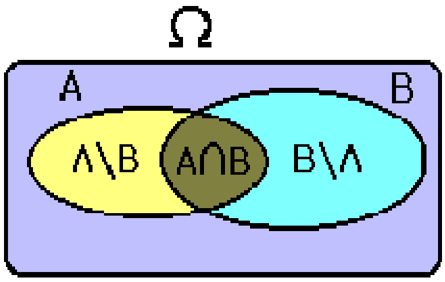
Si A et B sont deux événements alors :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(\emptyset) = 0$$

$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



3. Probabilité uniforme

Définition

Soit $\Omega = \{w_1 , w_2 , w_3 , ... , w_n\}$ et p une probabilité définie sur Ω.
Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit que p est une **probabilité uniforme** ou une **équiprobabilité**.

Dans ce cas on a :

- $\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ \ p(w_i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{card\ \Omega}.$
- Pour tout évènement A on a : $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

. **Vocabulaire**

Lorsqu'on dit « on tire au hasard un élément de l'univers Ω », cela signifie que Ω est muni d'une probabilité uniforme.

Exercice 2

On lance deux dés cubique bien équilibrés dont les faces de chacun sont numérotées de 1 jusqu'à 6.
Déterminer Ω et Card Ω
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A= « Les deux faces obtenues portent le même numéro »
B= « Obtenir au moins une face qui porte le numéro 1 »

solutions

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\text{Card}\Omega = 6^2 = 36$

$A = \{(a,a) \text{ où } a \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, $\text{Card}A = 6$

$p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\overline{B} = \text{"Ne pas obtenir la face n°1"} = \{2,3,4,5,6\}^2$

$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$

II. Probabilité conditionnelle - événements indépendants

1. Probabilité conditionnelle

Activité

Un sac contient 12 jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit:
7 jetons blancs numérotés 1,1,1,1,1,2,2. 5 jetons noirs numérotés 1,2,2,2,2. On tire au hasard un jeton du sac.
1°) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
A= « Tirer un jeton qui porte le numéro 2 ».
B= « Tirer un jeton blanc ».
C= « Tirer un jeton blanc , sachant qu'il porte le n°2 ».

2°)Comparer p(C) et $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Solutions
1°)Considérons la répartition des jetons selon leurs numéros. Il y a 6 jetons numérotés 1 et 6 jetons numérotés 2
Donc p(A)= 6/12 = 1/2 .
Il y a 7 jetons blancs sur 12 donc p(B) = 7/12
Parmi les 6 jetons numéro 2, il y a 2 blancs et 4 noirs donc p(C) = 2/6 = 1/3

2°) $p(A \cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$; $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}=\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{3}=p(C)$

Définition

Soit p une probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$. A et B deux événements tels que p(A) ≠ 0

On appelle probabilité de B sachant A et on note p(B/A) le réel défini par : $p(B/A)=\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Conséquences

$\boxed{Si\ p(A) \neq 0\ alors\ p(A \cap B) = p(A)p(B/A)}$

Cette formule est connue sous le nom : **Principe des probabilités composées**
De même pour trois événements, on montre que:

$\boxed{Si\ \ p(A) \neq 0\ \ et\ p(A \cap B) \neq 0\ \ alors\ on\ a :\ \ p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B/A)p(C/A \cap B)}$

Exercice 3

On considère une urne contenant six boules blanches et quatre boules noires.
On tire au hasard , successivement et sans remise, trois boules de l'urne.
Calculer la probabilité de l'événement suivant: A= « La première boule noire obtenue apparaît au troisième tirage »

Solutions
Considérons les événements suivants :

A_1 : " Le premier tirage donne une boule blanche "

A_2 : " Le deuxième tirage donne une boule blanche "

A_2 : " Le troisième tirage donne une boule noire "

$$p(A)=p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1 \cap A_2)$$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$$

Théorème

Soient Ω un univers et B un événement tel que $p(B) \neq 0$. On a :

- $p(\Omega / B) = 1$.
- $p(A_1 \cup A_2 / B) = p(A_1 / B) + p(A_2 / B)$, pour tous évènements incompatibles A_1 et A_2.
- $p(\overline{A} / B) = 1 - p(A / B)$, pour tout événement A.

Principe des probabilités totales

Soient Ω un univers et A et B deux événements tels que l'événement A n'est ni certain ni impossible ($p(A) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$). On a :

$$\boxed{p(B) = p(A).p(B/A) + p(\overline{A}) \times p(B/\overline{A})}$$

Plus généralement:

Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$ **et** $A_i \cap A_j = \varnothing$ **(pour tous i et j tels que** $i \neq j$**) et** $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$

$p(A_k) \neq 0$ **alors pour tout évènement B on a :** $p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k).p(B / A_k)$.

Exercice 4

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope.
La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Exercice 5

On dispose de deux urnes u1 et u2.
L'urne u1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u2 contient une boule blanche et deux boules noires.
On lance un dé non truqué.
Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u1. Sinon on tire une boule dans l'urne u2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)
1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u1.

Exercice 6

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.
a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$
b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?
c) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 7(corrigé)

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci.
On note :
** N l'événement : « le dé tiré est normal » ;*

** U l'événement : « on obtient 1 au premier lancer » ;*
** pour n entier non nul, S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers ». Justifier les résultats suivants:*

a. $P(U)=\frac{2}{9}$.

b. Pour tout entier n non nul, on a : $P(S_n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour n entier non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

c. Pour tout entier n non nul, on a : $\mathbf{p_n=\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}}$.

Correction

a. On trouve facilement $P(N)=\frac{2}{3}$, $P(U/N)=\frac{1}{6}$ et $P(U/\bar{N})=\frac{2}{6}$. Reprenons les probabilités totales :

$P(U)=P(U/N).P(N)+P(U/\bar{N}).P(\bar{N})=\frac{1}{6}.\frac{2}{3}+\frac{2}{6}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

b. épreuves indépendantes répétées donc loi binomiale : les paramètres sont *n* pour le nombre de tirages et *p* :

* si on choisit un dé normal $p=\frac{1}{6}$, on a alors $P\ (\text{tirer } 6\ n \text{ fois})=C_n^n p^n(1-p)^0=\left(\frac{1}{6}\right)^n$;

* si on choisit le dé truqué $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, on a alors $P(\text{tirer } 6\ n \text{ fois})=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

En refaisant le même raisonnement qu'au a. on obtient : $P(\text{tirer } 6\ n \text{ fois})=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$p_n=P(\bar{N}/S_n)=\frac{P(\bar{N}\cap S_n)}{P(S_n)}$$

c.
$$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n}{2\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}=\frac{4^n}{2+4^n}=\frac{1}{2\frac{1}{4^n}+1}.$$

2. Evénements indépendants

Définition :
Deux événements A et B sont dits indépendants (par rapport à P) si : $p(A\cap B)=p(A)p(B)$

Dire que A et B sont indépendants signifie donc qu'avoir des informations concernant la réalisation de A ne renseigne pas sur la réalisation de B.

Exemple :

1. On lance un dé à 6 faces et on note A l'événement "Obtenir un nombre pair", et B l'événement "Obtenir un multiple de 3". On a : $p(A)=1/2 \quad , \quad p(B)=1/3$
   $p(A\cap B)=1/6=p(A)p(B)$
   Les événements A et B sont indépendants.
2. On lance deux dés rouges et verts, et on note A l'événement "La somme des numéros fait 6" et B l'événement "Sur le dé rouge, on obtient un nombre pair". Un petit dénombrement de tous les cas possibles montre que :
   $p(A)=5/36 \quad , \quad p(B)=18/36$
   $p(A\cap B)=2/36\neq p(A)p(B)$
   Les événements A et B ne sont pas indépendants.

III. Variable aléatoire

1. Définition

Activité

On lance deux dés cubique bien équilibrés dont les faces de chacun sont numérotées de 1 jusqu'à 6.
On désigne par X la somme des numéros obtenus.
Quelles sont les valeurs prises par X ?

solutions

Déterminer les probabilités correspondantes.
Les valeurs prises par X sont 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.
Les événements correspondantes , notés (X=k) où k est l'une des valeurs prises par X, forment un système complet.
(X=2)={(1,1)} ; (X=3)={(1,2),(2,1)} ; (X=4)={(1,3),(2,2),(3,1)} ; (X=5)={(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}
(X=6)={(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)} ; (X=7)={(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}
(X=8)={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)} ; (X=9)={(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)} ; (X=10)={(4,6),(5,5),(6,4)}
(X=11)={(5,6),(6,5)} ; (X=12)={(6,6)}
Les probabilités correspondantes sont résumées dans le tableau suivant:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définitions

Soit un univers Ω fini.
On appelle **variable aléatoire réelle** (ou aléa numérique) définie sur l'univers Ω, toute application $X : \Omega \to IR$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(X = x)$ désigne l'ensemble des éventualités ayant la même image x par X.
C'est-à-dire : $(X = x) = \{\omega;\ \omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}$

Soit un univers Ω fini.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers Ω. On appelle **loi de probabilité de X** ou distribution des probabilités de X, l'application qui à chacune des valeurs x_i prises par X, fait correspondre la probabilité $p_i = p(X = x_i)$

Remarque

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Les événements $(X = x_i)_{1 \le i \le n}$ forment un système complet

donc $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$

2. Fonction de répartition

Définition

Soit un univers Ω fini et $X : \Omega \to IR$ une variable aléatoire.
La fonction de répartition de X est l'application
$F : IR \to [0, 1]$ définie pour tout réel x par :

$$F(x) = p(X \le x).$$

Pour le réel x, F(x) est la probabilité de l'évènement $(X \le x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \le x\}$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers fini Ω.
Soit F la fonction de répartition de X. On a :

- F est croissante sur IR.
- Si les éléments x_i de $X(\Omega)$ sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et si $p(X = x_i) = p_i$ pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ alors F est définie sur IR par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, x_1\right[\\ p_1 & \text{si } x \in \left[x_1, x_2\right[\\ . & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_i & \text{si } x \in \left[x_i, x_{i+1}\right[\\ . & \\ 1 & \text{si } x \in \left[x_n, +\infty\right[\end{cases}$$

Exercice 9 (corrigé)

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces portent les nombres : -1, 0, 0, 1, 1, 2.
On lance ce dé deux fois de suite. On désigne par a le nombre apparu sur la face supérieure au premier lancer et par b le nombre apparu sur la face supérieure au deuxième lancer.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque couple (a, b) associe la somme (a + b).
1) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) a) Déterminer la fonction de répartition F de Y.
b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal du plan.
3) a) Calculer $p(0 < Y \le 3)$ *et comparer le résultat avec le réel F (3) – F (0).*
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a: $p(Y > x) = 1 - F(x)$.
c) Montrer que pour tous réels a et b tels que a < b on a : $p(a < Y \le b) = F(b) - F(a)$

solutions

1) L'expérience aléatoire est le lancer du dé cubique deux fois de suite, on a donc :

card $\Omega = 6^2 = 36$. (36 couples (a,b))

Soit Y la variable aléatoire qui à chaque élément de Ω associe la somme des points obtenus.

Pour déterminer la loi de probabilité de Y, on pourra utiliser le tableau suivant :

+	-1	0	0	1	1	2
-1	-2	-1	-1	0	0	1
0	-1	0	0	1	1	2
0	-1	0	0	1	1	2
1	0	1	1	2	2	3
1	0	1	1	2	2	3
2	1	2	2	3	3	4

On a Y(Ω) = {-2; -1 ; 0; 1; 2; 3; 4 }.

Le tableau suivant donne la loi de probabilité associée à Y.

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) a) La fonction de répartition F de Y est définie sur IR par :

$F(x)=0 \quad \text{si } x\in\,]-\infty,-2[\,;$

$F(x)=p_1=\frac{1}{36} \quad \text{si } x\in[-2,-1[\,; \quad F(x)=p_1+p_2=\frac{5}{36} \quad \text{si } x\in[-1,0[\,;$

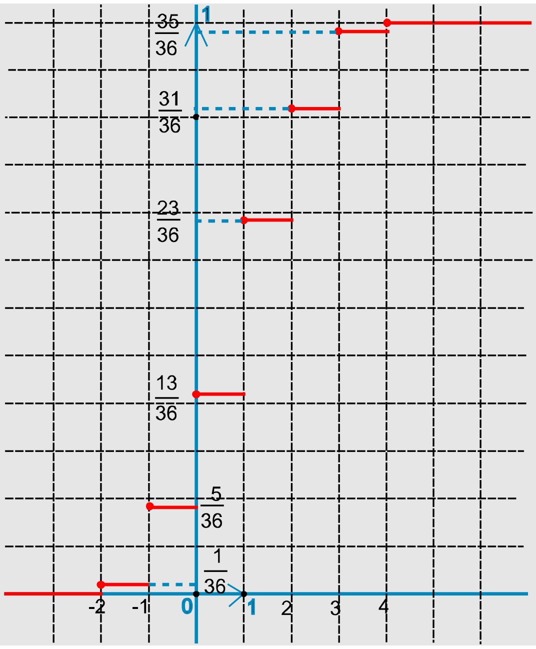
$F(x)=p_1+p_2+p_3=\frac{13}{36} \text{ si } x\in[0,1[\,;$

$F(x)=p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{23}{36} \text{ si } x\in[1,2[$

$F(x)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\frac{31}{36} \text{ si } x\in[2,3[$

$F(x)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{35}{36} \text{ si } x\in[3,4[\quad F(x)=\frac{36}{36}=1 \text{ si } x\in[4,+\infty[$.

b) Représentation graphique de F



3) a) $p(0<Y\leq 3)=p(Y=1)+p(Y=2)+p(Y=3)=\frac{22}{36}$ et on a : $F(3)-F(0)=\frac{35}{36}-\frac{13}{36}=\frac{22}{36}$.

D'où $p(0<Y\leq 3)=F(3)-F(0)$.

b) Montrons que x ℝ on a: p Y x 1 F(x).Les évènements Y x et Y x sont contraires donc pour tout réel x, on a : p Y x 1 p Y x 1 F(x).

c) Pour tous réels a et b tels que a < b on a : $(Y\leq a)\subset(Y\leq b)$ et

$(a<Y\leq b)=(Y\leq b)\setminus(Y\leq a)$.Donc $\begin{aligned} p(a<Y\leq b)&=p(Y\leq b)-p(Y\leq a)\\ &=F(b)-F(a)\end{aligned}$.

3. Espérance mathématique

Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini

et X une variable aléatoire définie sur Ω

On appelle espérance mathématique de X, le réel noté E(X) défini par :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\{\omega\}) \quad \text{ou encore} \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les valeurs prises par X

Remarques

1)L'espérance mathématique de X est la moyenne des valeurs xi pondérées par les probabilités correspondantes P(X=xi).

2)Dans un jeu de hasard, si X désigne le gain algébrique (positif ou négatif) alors E(X) désigne le gain moyen qu'on peut espérer sur un grand nombre de parties

3)Dans un jeu de hasard , on dit que le jeu est :

équitable si E(X)=0

favorable ou gagnant si E(X)>0

défavorable ou perdant si E(X)<0

Exercice 10

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule

Si elle est rouge, il gagne 10 D , si elle est jaune, il perd 5 D, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remettre la première boule tirée.

Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 D, sinon il perd 4 D.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Etablir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que le jeu soit équitable.

4. Variance et écart-type

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i avec les probabilités respectives p_i pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

La variance de X, noté V(X), est le réel positif défini par :

$$\mathbf{V(X)} = (x_1 - \overline{X})^2 . p_1 + ... + (x_n - \overline{X})^2 . p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 . p_i$$

où $\overline{X} = E(X)$.

L'écart- type de X, que l'on note $\sigma(X)$, est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

5. Loi binomiale

Considérons une expérience aléatoire constituée de
n épreuves (n>1) identiques et indépendantes n'ayant que deux issues: succès ou échec notées S et E .
Si P(S)= p alors P(E)=1-p=q.
Si X désigne le nombre de succès obtenus au cours de ces n épreuves on dit que **X suit une loi binomiale de paramètres n et p on écrit** $X \sim B(n,p)$.

On montre que la loi de probabilité de X est définie par :

$$\forall k \in \{1,2,\dots,n\} \quad p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Espérance mathématique de X : **E(X)=np**
Variance de X : **V(X)=npq**

Exercice 11

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions.

Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte.

Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard.

On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

SIGMATHS